第６講　計算練習

20　2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して

$$f(x+1)=c\int_0^1 (3x^2+4xt)f'(t)\,dt$$

が x についての恒等式になるような定数 a，b，c の組をすべて求めよ．

《10 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

21　x の3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が，3つの条件

$$f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=1$$

を全て満たしているとする．このような $f(x)$ の中で定積分

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx$$

を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ．ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す．

《11 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

22　1辺の長さが1の正方形を底面とする四角柱OABC－DEFGを考える．3点P，Q，Rを，それぞれ辺AE，辺BF，辺CG上に，4点O，P，Q，Rが同一平面上にあるようにとる．四角形OPQRの面積をSとおく．また∠AOPをα，∠CORをβとおく．

(1)　Sを$\tan\alpha$と$\tan\beta$で表せ．

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$の値を求めよ．さらに，$\alpha\leqq\beta$のとき，$\tan\alpha$の値を求めよ．

《14東大・理科》

※本問は，授業の進め方の都合上，東京大学の入試問題に記載された図を記載しておりません。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

23　O を原点とする座標平面上に $\mathrm{A}(-3,\ 0)$ をとり，$0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲にある θ に対して，次の条件(i)，(ii)をみたす 2 点 B，C を考える．

(i)　B は $y>0$ の部分にあり，$\mathrm{OB}=2$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=180^\circ-\theta$ である．

(ii)　C は $y<0$ の部分にあり，$\mathrm{OC}=1$ かつ $\angle\mathrm{BOC}=120^\circ$ である．ただし $\triangle\mathrm{ABC}$ は O を含むものとする．

以下の問(1)，(2)に答えよ．

(1)　$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積が等しいとき，θ の値を求めよ．

(2)　θ を $0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲で動かすとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ．

《10 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　計算練習

20　2次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して

$$f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)dt$$

が x についての恒等式になるような定数 a, b, c の組をすべて求めよ．

《10 東大・文科》

【答】 $(a,\ b,\ c)=\left(-\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ 1\right)$

【解説】 $f(x+1)=(x+1)^2+a(x+1)+b=x^2+(a+2)x+(a+b+1)$　…①である．

またf $f'(x)=2x+a$ より

$$c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)dt=c\int_0^1(3x^2+4xt)(2t+a)dt$$
$$=c\int_0^1\{8xt^2+2(3x^2+2ax)t+3ax^2\}dt$$
$$=c\left[\frac{8}{3}xt^3+(3x^2+2ax)t^2+3ax^2t\right]_0^1$$
$$=3(a+1)cx^2+\left(2a+\frac{8}{3}\right)cx\quad\cdots②$$

となる．

①と②が恒等的に等しいので
$$\begin{cases}3(a+1)c=1 & \cdots③\\ \left(2a+\frac{8}{3}\right)c=a+2 & \cdots④\\ 0=a+b+1 & \cdots⑤\end{cases}$$
が成り立つ．

③より $a+1\neq0$ なので ③ $\iff$ $c=\dfrac{1}{3(a+1)}$ を④に代入して

$$\left(2a+\frac{8}{3}\right)\cdot\frac{1}{3(a+1)}=a+2\iff(3a+5)(3a+2)=0\text{ かつ }a\neq-1$$
$$\therefore\quad a=-\frac{5}{3},\ -\frac{2}{3}$$

これと③，⑤より $\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=\left(-\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ 1\right)}$.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

21 x の３次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が，３つの条件

$$f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=1$$

を全て満たしているとする．このような $f(x)$ の中で定積分

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx$$

を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ．ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す．

《11 東大・文科》

【答】 $f(x)=-\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{4}$，最小値 $\dfrac{81}{32}$

【解説】 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$ である．

$f(1)=1$ より $a+b+c+d=1$ …①

$f(-1)=-1$ より $-a+b-c+d=-1$ …②

$\displaystyle\int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=2\int_0^1(bx^2+d)dx=2\left[\frac{1}{3}bx^3+dx\right]_0^1=\frac{2}{3}b+2d=1$ …③

①＋②より $2b+2d=0$　　$\therefore$　$d=-b$

これと③より $b=-\dfrac{3}{4}$，よって $d=\dfrac{3}{4}$.

これらと①より $a+c=1$　　$\therefore$　$c=1-a$ である．

また $f''(x)=6ax-\dfrac{3}{2}$ より

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx\\&=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(6ax-\frac{3}{2}\right)^2dx\\&=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(36a^2x^2-18ax+\frac{9}{4}\right)dx\\&=\left[12a^2x^3-9ax^2+\frac{9}{4}x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{27}{2}a^2+\frac{27}{4}a+\frac{27}{8}\\&=\frac{27}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{81}{32}\end{aligned}$$

となるので，$a=-\dfrac{1}{4}$ のとき I は**最小値 $\dfrac{81}{32}$** をとり，このとき

$f(x)=-\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{4}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

22 １辺の長さが１の正方形を底面とする四角柱 OABC－DEFG を考える．３点 P，Q，R を，それぞれ辺 AE，辺 BF，辺 CG 上に，４点 O，P，Q，R が同一平面上にあるようにとる．四角形 OPQR の面積を S とおく．また $\angle$AOP を α，$\angle$COR を β とおく．

(1) S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ で表せ．

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ．さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

《14 東大・理科》

※本問は，授業の進め方の都合上，東京大学の入試問題に記載された図を記載しておりません。

【答】 (1) $S=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$　　(2) $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}$，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$

【解説】 (1) O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(0, 1, 0) として，D を z 軸上の z 座標が正の部分にとることができる．

このとき，P(1, 0, $\tan\alpha$)，R(0, 1, $\tan\beta$) $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表せるので，

$$\boldsymbol{S}=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}$$

(2) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$ より $\tan\alpha+\tan\beta=p$，$\tan\alpha\tan\beta=q$ とおくと

$1=\dfrac{p}{1-q}$ つまり $q=1-p$ である．

また $S=\dfrac{7}{6}$ と(1)の結果より $\dfrac{7}{6}=\sqrt{1+p^2-2q}\iff\dfrac{13}{36}=p^2-2q$ となるが，

$q=1-p$ を代入して

$\dfrac{13}{36}=p^2-2q\iff\dfrac{13}{36}=p^2-2(1-p)\iff\left(p+\dfrac{17}{6}\right)\left(p-\dfrac{5}{6}\right)=0$ なので $\boldsymbol{p=\dfrac{5}{6}}$．

このとき $q=1-p=\dfrac{1}{6}$ より，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ は

$x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0\iff\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=0$ の２解となる．ここで

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\tan\alpha\leqq\tan\beta$ より $\boldsymbol{\tan\alpha=\dfrac{1}{3}}$．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

23　O を原点とする座標平面上に $A(-3,\ 0)$ をとり，$0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲にある θ に対して，次の条件(i)，(ii)をみたす 2 点 B，C を考える．

(i)　B は $y>0$ の部分にあり，$OB=2$ かつ $\angle AOB=180^\circ-\theta$ である．

(ii)　C は $y<0$ の部分にあり，$OC=1$ かつ $\angle BOC=120^\circ$ である．ただし $\triangle ABC$ は O を含むものとする．

以下の問(1)，(2)に答えよ．

(1)　$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積が等しいとき，θ の値を求めよ．

(2)　θ を $0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲で動かすとき，$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ．

《10 東大・文科》

【答】 (1)　$\theta=30^\circ$　　(2)　最大値は $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{5}{14}\sqrt{7}$

【解説】 (1)　題意より，$\triangle OAB$ の面積は $\dfrac{1}{2}\times OA\times OB\times\sin(180^\circ-\theta)=3\sin\theta$ となり，

$\angle AOC=360^\circ-120^\circ-(180^\circ-\theta)=\theta+60^\circ$ より $\triangle OAC$ の面積は

$\dfrac{1}{2}\times OA\times OC\times\sin(\theta+60^\circ)=\dfrac{3}{2}\sin(\theta+60^\circ)$ となるので，

$$\begin{aligned}3\sin\theta=\frac{3}{2}\sin(\theta+60^\circ)\quad&\Longleftrightarrow\quad 3\sin\theta=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)\\&\Longleftrightarrow\quad 3\sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta+\frac{3}{4}\sin\theta\\&\Longleftrightarrow\quad \frac{9}{4}\sin\theta-\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta=0\\&\Longleftrightarrow\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin(\theta-30^\circ)=0\end{aligned}$$

$0^\circ<\theta<120^\circ$ より $\boldsymbol{\theta=30^\circ}$．

(2)　$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積の和は

$$\begin{aligned}3\sin\theta+\frac{3}{2}\sin(\theta+60^\circ)&=\frac{15}{4}\sin\theta+\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta\\&=\frac{3\sqrt{7}}{2}\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

となる．ただし，α は $0^\circ<\alpha<90^\circ$ かつ $\cos\alpha=\dfrac{5}{14}\sqrt{7}$ を満たす角である．

ここで，$\alpha<\theta+\alpha<120^\circ+\alpha$ より面積の和は $\theta+\alpha=90^\circ$ つまり $\theta=90^\circ-\alpha$ のときに**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{7}}{2}}$ をとる．

このとき $\boldsymbol{\sin\theta}=\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha\boldsymbol{=\dfrac{5}{14}\sqrt{7}}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。